

INDICE

1.0	Richiami di algebra delle matrici	1
1.1	Matrici rettangolari	1
1.2	Matrici quadrate	2
1.2.1	Determinante	2
1.2.2	Complemento algebrico	3
1.3	Algebra delle matrici	3
1.3.1	Trasposta di una matrice	4
1.3.2	Matrice unità e matrice nulla	4
1.3.3	Somma di matrici	5
1.3.4	Differenza di matrici	5
1.3.5	Prodotto di matrici	5
1.3.6	Divisione di matrici	6
1.3.7	Esercizi da svolgere	9
1.4	Sistemi lineari di equazioni	10
1.4.1	Soluzione di un sistema determinato	10
1.4.2	Sistemi impossibili	12
1.4.3	Sistemi indeterminati	13
1.4.4	Sistemi “travestiti”	14
1.4.5	Uso delle matrici nella soluzione dei sistemi di equazioni lineari	16
2.0	Stabilità e resistenza	19
3.0	Elementi di teoria dei vettori	23
3.1	Somma grafica	26
3.2	Somma analitica	26
3.3	Prodotto scalare	27
3.4	Tipi di vettori	28
3.5	Somma di cursori	29
3.6	Somma di vettori applicati	29
3.7	Proprietà dei poligoni funicolari	29
3.8	Momento di una forza	30
3.9	La coppia	32
3.10	Principio di equivalenza e di riducibilità	33
4.0	Richiami di meccanica	35
4.1	Condizioni cinematiche e meccaniche di quiete	37
5.0	I vincoli	39
5.1	I vincoli nel piano (classificazione cinematica)	39
5.1.1	I vincoli semplici	39
5.1.1.1	Il carrello	40
5.1.1.2	La biella	40
5.1.1.3	Il quadripendolo	41
5.1.2	I vincoli doppi	42
5.1.2.1	La cerniera fissa	42
5.1.2.2	L’incastro scorrevole	42
5.1.3	I vincoli tripli	43
5.1.3.1	L’incastro perfetto	43

5.2	I vincoli nello spazio (classificazione cinematica)	43
5.3	I vincoli nel piano (classificazione meccanica)	44
5.3.1	Vincoli diffusi e vincoli puntiformi	45
5.3.2	Reazioni del carrello, della biella e del quadripendolo	45
5.3.3	Reazioni della cerniera, dell'incastro scorrevole e perfetto	46
6.0	Calcolo delle reazioni dei vincoli	47
6.1	Classificazione dei corpi vincolati	47
6.2	Calcolo delle forze reattive in una trave isostatica	49
6.3	Calcolo delle forze reattive in una trave ipostatica	51
6.4	Calcolo delle forze reattive in una trave iperstatica	53
6.5	Calcolo delle forze reattive in una trave ipercinestatica	54
6.6	Algoritmo per il calcolo delle reazioni	55
6.7	Sistemi di travi	57
6.8	Forze distribuite e forze concentrate	58
6.9	Complessità di natura geometrica	59
6.9.1	I teoremi sui triangoli rettangoli della trigonometria	60
6.10	Soluzione di esempi complessi	63
6.10.1	Esempio 1	63
6.10.2	Esempio 2	65
6.11	Il Principio dei Lavori Virtuali	67
6.11.1	Gradi di libertà e Parametri di Lagrange	70
6.11.2	Rotazioni infinitesime: semplificazioni	71
6.11.3	Il Teorema di Eulero per i moti rigidi e infinitesimi nel piano	72
6.11.4	Componente di spostamento a causa di una rotazione rigida	73
6.11.5	Equazioni di equilibrio in forma matriciale scritte tramite il P.LL.VV.	77
7.0	I vincoli interni	81
7.1	Classificazione cinematica dei vincoli interni	82
7.2	Classificazione meccanica dei vincoli interni	83
7.4	Vincoli interni anomali	84
7.4.1	La cerniera interna multipla	84
7.4.2	L'incastro interno come vincolo di continuità	85
8.0	Calcolo delle reazioni dei vincoli esterni ed equazioni per i moti relativi	87
8.1	Algoritmo generale per il calcolo delle reazioni dei vincoli esterni	93
8.2	Esempio 1	94
8.3	Esempio 2	98
8.4	Esempio 3	104
8.5	Esempio 4	105
8.6	Particolari disposizioni dei vincoli che danno inefficacia	109
9.0	Reazioni dei vincoli interni	111
10.0	Richiami di analisi e di geometria analitica	123
10.1	Derivata prima di una funzione	123
10.1.1	Derivata prima come limite del rapporto incrementale	124
10.2	Punti di stazionarietà di una funzione	125

10.3	L'integrale indefinito	126
10.4	L'integrale definito	128
11.0	Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione	
	In travi semplici	129
11.1	Disegno dei diagrammi senza l'ausilio diretto delle funzioni	138
11.1.1	Trave a mensola con carico concentrato all'estremità	138
11.1.2	Trave a mensola con coppia concentrata all'estremità	139
11.1.3	Trave a mensola con carico uniforme	140
11.1.4	Trave a mensola con carico triangolare	142
11.1.5	Trave a mensola con carico triangolare specchiato	143
11.1.5	Trave a mensola con carico trapezio	145
11.1.7	Trave a mensola con carico trapezio specchiato	147
11.1.8	Trave a mensola con carico parabolico	149
11.1.9	Vincoli interni singolari, un aiuto nel disegno dei diagrammi	151
11.1.10	Trave con cerniere interne	153
11.1.11	Trave con bipendolo interno	155
11.1.12	Legame tra deformata e momento flettente	157
12.0	Diagrammi in strutture complesse	159
12.1	Regole di raccordo	163
12.1.1	Forze concentrate	164
12.1.2	Coppie concentrate	166
12.1.3	Esempio 1	169
12.1.4	Esempio 2	171
12.1.5	Esempio 3	172
12.1.6	Esempio 4	174
12.1.7	Equazioni di equilibrio dei nodi	176
12.1.8	Esempio 5	178
12.2	Sistemi molteplici connessi	181
12.2.1	Calcolo delle condizioni di vincolo	182
12.2.2	Trasformazione di un sistema pluriconnesso	183
13.0	Le travature reticolari	189
13.1	Equazioni di equilibrio dei nodi	190
14.0	La reazione diffusa del vincolo di continuità: le tensioni	197
14.1	Relazione tra componenti di tensione e caratteristiche della sollecitazione	199
15.0	La geometria delle masse	203
15.1	Momento statico	204
15.1.2	Il baricentro di una figura	207
15.1.3	Il Teorema di Varignon	207
15.1.4	Coordinate del baricentro	209
15.1.5	Il Teorema di trasposizione	212
15.2	Momento d'inerzia assiale	213
15.2.1	Il Teorema di trasposizione	217
15.2.2	Gli assi principali d'inerzia ed i momenti d'inerzia principali	220
15.2.3	Un surrogato del Teorema di Varignon	220
15.2.4	Il baricentro dei momenti statici	221
15.3	Polarità tra rette e baricentri dei momenti statici	223
15.3.1	L'ellisse centrale d'inerzia	225

15.3.2	Usare l'ellisse centrale d'inerzia	230
15.3.2.1	Data l'ellisse e la retta trovare il baricentro dei momenti statici	230
15.3.2.2	Data l'ellisse e il baricentro dei momenti statici trovare la retta corrispondente	231
15.3.3	Il nocciolo centrale d'inerzia	232
15.3	Momento d'inerzia polare	238
15.3.1	Momento d'inerzia polare come somma di due momenti d'inerzia assiali	241
15.4	Momento d'inerzia centrifugo	243
15.4.1	Il Teorema di Trasposizione	248
15.5	Rotazione del sistema di riferimento	250
15.5.1	Calcolo della retta coniugata di una retta generica assegnata	256
16.0	Leggi costitutive	259
16.1	Comportamento elastico	260
16.1.1	Comportamento elastico lineare	260
16.1.2	Comportamento elastico non lineare	260
16.2	Comportamento plastico	261
16.3	La Legge di Hooke	262
16.3.1	Prova a trazione e compressione	262
16.3.1.1	Prova a trazione e compressione nei materiali duttili	263
16.3.1.2	Prova a trazione e compressione nei materiali fragili	266
16.3.1.3	Prova a taglio	267
16.3.1.4	La legge di Hooke generalizzata	270
17.0	Teoria della trave	275
17.1	Lo Sforzo Normale Semplice	277
17.1.2	Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier	277
17.1.3	Equazione costitutiva, legge di Hooke	278
17.1.4	Legge di variazione della reazione distribuita	278
17.2	La Flessione Semplice	281
17.2.1	Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier	281
17.2.2	Equazione costitutiva, legge di Hooke	283
17.2.3	Legge di variazione della reazione distribuita	283
17.2.4	Equazioni di equilibrio e calcolo delle σ	283
17.2.4	Flessione retta e flessione deviata	288
17.2.5	Flessione deviata come somma di due flessioni rette	288
17.3	La Torsione semplice	289
17.3.1	Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier	289
17.3.2	Equazione costitutiva, legge di Hooke	291
17.3.3	Legge di variazione della reazione distribuita	291
17.3.4	Equazioni di equilibrio e calcolo delle τ	292
17.3.5	Sezioni di uso frequente: sezione rettangolare	294
17.3.6	Sezioni di uso frequente: sezione composta da rettangoli	294
17.4.6	Le sezioni cave a parete sottile: la teoria di Bredt	296
17.4	Il Taglio	299
17.4.1	Legge di variazione delle tensioni al variare della corda	303
17.4.1.1	Sezione rettangolare	304
17.4.1.2	Sezioni composte da rettangoli	305
17.4.1.3	Sezione triangolare	307

17.5	Sforzo normale e flessione	309
17.5.1	Sforzo Normale e Flessione come Sforzo Normale Eccentrico	309
17.5.2	Approccio diretto	310
17.5.2.1	Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier	310
17.5.2.2	Equazione costitutiva, legge di Hooke	309
17.5.2.3	Legge di variazione della reazione distribuita	311
17.5.2.4	Equazioni di equilibrio e calcolo delle σ	313
17.5.2.5	Sforzo normale eccentrico (S.N.E.) retto e deviato	320
17.5.2.5.1	S.N.E. deviato come somma di uno Sforzo Normale semplice e due flessioni rette	321
18.0	Stato di tensione nel punto e verifiche di resistenza	323
18.1	Cerchio di Mohr	328
18.2	Verifiche di resistenza	333
A.0	Appendice A: programma telai piani	339
B.0	Appendice B: programma geometria delle masse	365
Guida all'installazione del software		381
	Contenuti del CD-ROM allegato	381
	Requisiti hardware e software	381
	Procedura per la richiesta della password utente	381
	Installazione e registrazione del software	381
Licenza d'uso del software		383
Scheda di registrazione del software		384

1.0 RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI

Una *matrice* è una specie di cassetteria formata di n file orizzontali di cassette (*righe*) e di m file verticali (*colonne*); all'interno di ciascun cassetto si può introdurre tutto quello che si vuole: ad es. dei numeri (Fig. 1.1). Ciascun contenitore ha un'etichetta di riconoscimento che può racchiudere un nome (Ciccio, Mario, Filippo.....) oppure un numero di identificazione formato di due cifre (*indici*)¹: di cui la prima, i , indica sempre la riga di appartenenza, mentre la seconda, j , la colonna.

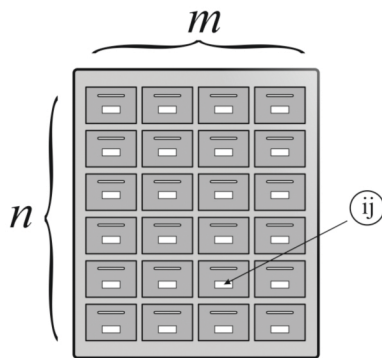


Fig. 1.1

Ciò che sta all'interno del cassetto generico prende il nome di *elemento* e si indica usualmente con una lettera minuscola seguita dai due indici i e j (a_{ij}). Il contenuto del cassetto indicato in Fig.1.1 sarebbe a_{53} : cioè ciò che sta dentro il contenitore che si trova all'incrocio della 5^a riga e della 3^a colonna.

Si chiama *ordine* di una matrice, e si indica con $n \times m$, il numero di righe e di colonne di cui essa è formata: così, ad es., una matrice di ordine 5×4 (cinque per quattro) sarà una tabella formata da 5 righe e 4 colonne.

Le matrici, che per noi, da questo momento in poi, saranno delle tabelle di numeri, possono classificarsi, in base alla loro forma, in

- *Matrici rettangolari*
- *Matrici quadrate*

1.1 Matrici rettangolari

Una matrice si dice rettangolare quando il numero di righe è diverso dal numero delle colonne $n \neq m$; essa è *rettangolare bassa* (Fig. 2.1a) se le colonne sono maggiori delle righe ($m > n$); *rettangolare alta* (Fig. 2.1b) se le righe sono maggiori delle colonne ($n > m$). Una matrice rettangolare alta con una sola colonna (Fig. 2.1c) si chiama *matrice colonna*, mentre, una matrice rettangolare bassa con un sola riga (Fig. 2.1d) si chiama *matrice riga*.

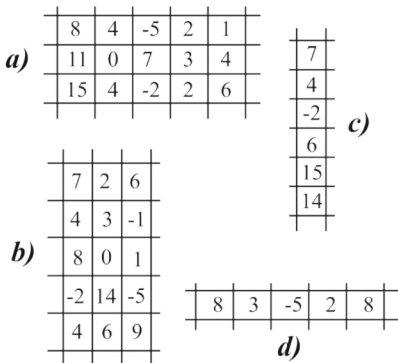


Fig. 2.1

Le matrici riga e colonna prendono anche il nome di *vettori*, in quanto, come vedremo nel seguito, verranno usate proprio per rappresentare analiticamente delle entità fisiche che prendono il nome di vettori.

¹ Nel noto gioco della *Battaglia Navale* ogni casella resta proprio identificata dal nome della riga e della colonna di appartenenza.

1.2 Matrici quadrate

Una matrice si dice *quadrata* quando il numero delle righe è uguale al numero delle colonne ($n=m$); ovviamente tali matrici non si differenziano più in base alla forma ma in base al contenuto. Le due diagonali di una matrice quadrata prendono rispettivamente il nome di *diagonale principale* e *diagonale secondaria* (Fig. 3.1a).

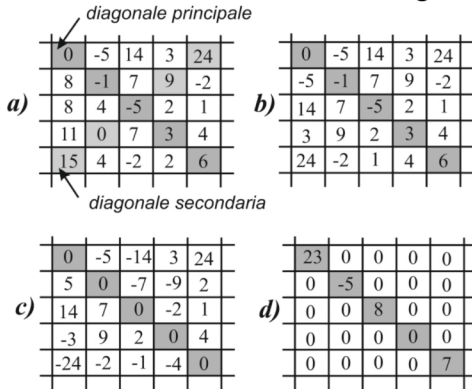


Fig. 3.1

sono l'uno l'opposto dell'altro e gli elementi sulla diagonale principale sono tutti nulli ($a_{ij} = -a_{ji}$ per $i \neq j$ e $a_{ij} = 0$ per $i = j$, Fig.3.1c).

Una matrice si dice *diagonale* se gli unici elementi diversi da zero giacciono sulla diagonale principale ($a_{ij} = 0$ per $i \neq j$, Fig.3.1d).

Ovviamente esistono anche altri tipi di matrici quadrate ma, per i nostri scopi, è sufficiente soltanto la conoscenza di quelli sopra elencati.

1.2.1 Il determinante

Le matrici quadrate hanno anche una particolarità che non è posseduta da quelle rettangolari: da esse è possibile estrarre un numero (ottenuto eseguendo una particolare serie di operazioni sugli elementi della matrice stessa²) che prende il nome di *determinante*.

6	5
8	3

$$D = (6 \times 3) - (8 \times 5) = -22$$

Fig. 4.1

L'estrazione del determinante è un lavoro abbastanza complesso e richiede lo sviluppo di un gran numero di operazioni elementari di somma e prodotto. C'è da sottolineare che l'impiego delle matrici non è affatto orientato al calcolo manuale ma a quello automatico: i microprocessori dei moderni personal computer sono in grado di eseguire miliardi di operazioni elementari al secondo. Tuttavia è utile, per poter svolgere delle semplici applicazioni numeriche, imparare, quantomeno, ad estrarre il determinante di una matrice 2x2 e di una matrice 3x3.

In una matrice 2x2 il determinante **D** si ottiene semplicemente effettuando il prodotto degli elementi della diagonale principale e sottraendo ad esso il prodotto degli elementi della diagonale secondaria (Fig. 4.1).

Per il calcolo del determinante di una matrice 3x3 si può applicare la così detta *regola di Sarrus*. Si comincia con l'ampliare la matrice aggiungendo due nuove colonne, che

² Si vuole volutamente evitare l'uso di un linguaggio rigoroso per facilitare l'acquisizione di alcuni concetti.

altro non sono che la ripetizione delle prime due (Fig.5.1). Nella matrice allargata si individuano 3 diagonali principali e 3 diagonali secondarie: si esegue la somma dei prodotti degli elementi delle 3 diagonali principali e, a questo valore, si sottrae il numero che si ottiene effettuando la somma dei prodotti delle 3 diagonali secondarie.

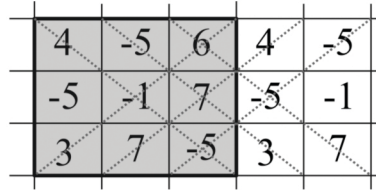


Fig. 5.1

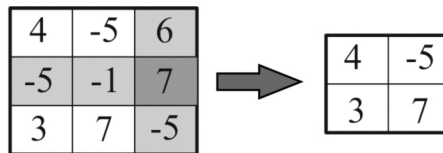
$$D = \{[(4) \times (-1) \times (-5)] + [(-5) \times (7) \times (3)] + [(6) \times (-5) \times (7)]\} - \{[(3) \times (-1) \times (6)] + [(7) \times (7) \times (4)] + [(-5) \times (-5) \times (-5)]\} = -348$$

Il determinante è un numero che può venire positivo, negativo o nullo. Se il determinante è diverso da zero la matrice si dice *non singolare*, mentre, se il determinante è nullo la matrice si dice *singolare*.

1.2.2 Complemento algebrico

In una matrice quadrata si definisce *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} , il determinante della matrice che si ottiene eliminando la i -ma riga e la j -ma colonna, avendo cura di cambiarne il segno se la somma degli indici $i+j$ risulta dispari.

Data la matrice quadrata di Fig.6.1, calcolare il complemento algebrico C_{23} , dell'elemento a_{23} . Si elimina la 2^a riga e la 3^a colonna della matrice e si calcola il determinante della matrice 2x2 rimanente. Siccome, $2+3=5$, è un numero dispari, il determinante ottenuto (43) si cambia di segno.



$$C_{23} = -\{[(4) \times (7)] - [(3) \times (-5)]\} = -43$$

Fig. 6.1

1.3 Algebra delle matrici

Le matrici possono essere trattate come se fossero dei numeri *sui generis*, cioè per esse è possibile definire le quattro operazioni algebriche fondamentali: *somma*,

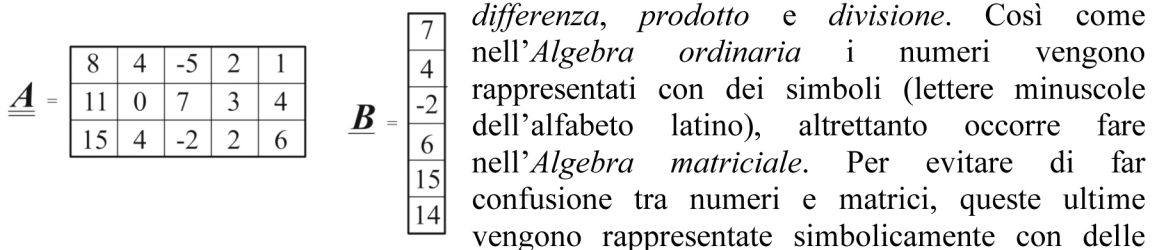


Fig. 7.1