INDICE

1.0 RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI

Una *matrice* è una specie di cassettiera formata di ***n*** file orizzontali di cassetti (*righe*) e di ***m*** file verticali (*colonne*); all'interno di ciascun cassetto si può introdurre tutto quello che si vuole: ad es. dei numeri (Fig. 1.1). Ciascun contenitore ha un'etichetta di riconoscimento che può racchiudere un nome (Ciccio, Mario, Filippo.....) oppure un numero di identificazione formato di due cifre (*indici*)[1]: di cui la prima, ***i***, indica sempre la riga di appartenenza, mentre la seconda, ***j***, la colonna.

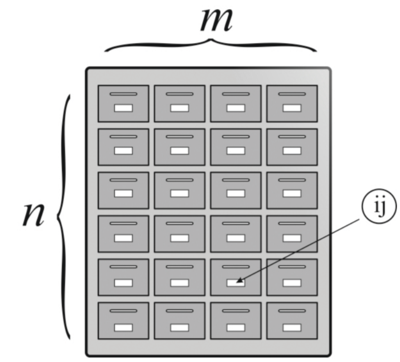


Fig. 1.1

Ciò che sta all'interno del cassetto generico prende il nome di *elemento* e si indica usualmente con una lettera minuscola seguita dai due indici ***i*** e ***j*** (a_{ij}). Il contenuto del cassetto indicato in Fig.1.1 sarebbe a_{53}: cioè ciò che sta dentro il contenitore che si trova all'incrocio della 5^ riga e della 3^ colonna.

Si chiama *ordine* di una matrice, e si indica con ***nxm***, il numero di righe e di colonne di cui essa è formata: così, ad es., una matrice di ordine 5x4 (cinque per quattro) sarà una tabella formata da 5 righe e 4 colonne.

Le matrici, che per noi, da questo momento in poi, saranno delle tabelle di numeri, possono classificarsi, in base alla loro forma, in

- ***Matrici rettangolari***
- ***Matrici quadrate***

1.1 Matrici rettangolari

Una matrice si dice rettangolare quando il numero di righe è diverso dal numero delle colonne $n \neq m$; essa è *rettangolare bassa* (Fig. 2.1a) se le colonne sono maggiori delle righe ($m>n$); *rettangolare alta* (Fig. 2.1b) se le righe sono maggiori delle colonne ($n>m$). Una matrice rettangolare alta con una sola colonna (Fig. 2.1c) si chiama *matrice colonna*, mentre, una matrice rettangolare bassa con un sola riga (Fig. 2.1d) si chiama *matrice riga*.

Le matrici riga e colonna prendono anche il nome di *vettori*, in quanto, come vedremo nel seguito, verranno usate proprio per rappresentare analiticamente delle entità fisiche che prendono il nome di vettori.

a)

8	4	-5	2	1
11	0	7	3	4
15	4	-2	2	6

b)

7	2	6
4	3	-1
8	0	1
-2	14	-5
4	6	9

c)

7
4
-2
6
15
14

d)

8	3	-5	2	8

Fig. 2.1

[1] Nel noto gioco della *Battaglia Navale* ogni casella resta proprio identificata dal nome della riga e della colonna di appartenenza.

1.2 Matrici quadrate

Una matrice si dice *quadrata* quando il numero delle righe è uguale al numero delle colonne (***n***=***m***); ovviamente tali matrici non si differenziano più in base alla forma ma in base al contenuto. Le due diagonali di una matrice quadrata prendono rispettivamente il nome di *diagonale principale* e *diagonale secondaria* (Fig. 3.1a).

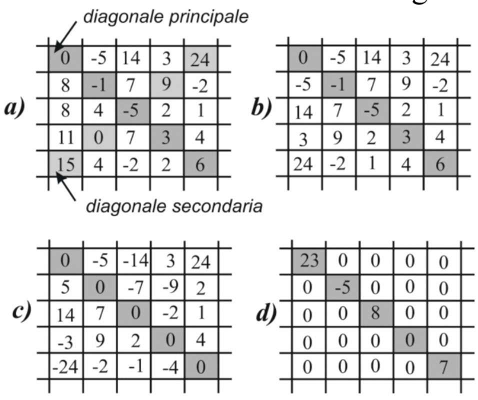


Fig. 3.1

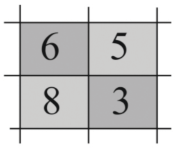
Una matrice si dice *generica* quando i suoi elementi sono collocati all'interno di essa senza alcuna regola (Fig.3.1a); si dice *simmetrica* quando gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono uguali ($a_{ij}=a_{ji}$, Fig.3.1b); si dice *antisimmetrica* (o *emisimmetrica*) se gli elementi disposti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono tali che sommati danno zero ($a_{ij} + a_{ji} = 0$). Ciò comporta che gli elementi simmetrici sono l'uno l'opposto dell'altro e gli elementi sulla diagonale principale sono tutti nulli ($a_{ij}=-a_{ji}$ per $i\neq j$ e $a_{ij}=0$ per $i=j$, Fig.3.1c).

Una matrice si dice *diagonale* se gli unici elementi diversi da zero giacciono sulla diagonale principale ($a_{ij}=0$ per $i\neq j$, Fig.3.1d).

Ovviamente esistono anche altri tipi di matrici quadrate ma, per i nostri scopi, è sufficiente soltanto la conoscenza di quelli sopra elencati.

1.2.1 Il determinante

Le matrici quadrate hanno anche una particolarità che non è posseduta da quelle rettangolari: da esse è possibile estrarre un numero (ottenuto eseguendo una particolare serie di operazioni sugli elementi della matrice stessa[2]) che prende il nome di *determinante*. L'estrazione del determinante è un lavoro abbastanza complesso e richiede lo sviluppo di un gran numero di operazioni elementari di somma e prodotto. C'è da sottolineare che l'impiego delle matrici non è affatto orientato al calcolo manuale ma a quello automatico: i microprocessori dei moderni personal computer sono in grado di eseguire miliardi di operazioni elementari al secondo. Tuttavia è utile, per poter svolgere delle semplici applicazioni numeriche, imparare, quantomeno, ad estrarre il determinante di una matrice 2x2 e di una matrice 3x3.



D = (6x3)-(8x5) = -22

Fig. 4.1

In una matrice 2x2 il determinante ***D*** si ottiene semplicemente effettuando il prodotto degli elementi della diagonale principale e sottraendo ad esso il prodotto degli elementi della diagonale secondaria (Fig. 4.1).

Per il calcolo del determinante di una matrice 3x3 si può applicare la così detta *regola di Sarrus*. Si comincia con l'ampliare la matrice aggiungendo due nuove colonne, che

---

[2] Si vuole volutamente evitare l'uso di un linguaggio rigoroso per facilitare l'acquisizione di alcuni concetti.

altro non sono che la ripetizione delle prime due (Fig.5.1). Nella matrice allargata si individuano 3 diagonali principali e 3 diagonali secondarie: si esegue la somma dei prodotti degli elementi delle 3 diagonali principali e, a questo valore, si sottrae il numero che si ottiene effettuando la somma dei prodotti delle 3 diagonali secondarie.

4	-5	6	4	-5
-5	-1	7	-5	-1
3	7	-5	3	7

Fig. 5.1

$$D = \{[(4)\times(-1)\times(-5)] + [(-5)\times(7)\times(3)] + [(6)\times(-5)\times(7)]\} - \{[(3)\times(-1)\times(6)] + \\ + [(7)\times(7)\times(4)] + [(-5)\times(-5)\times(-5)]\} = -348$$

Il determinante è un numero che può venire positivo, negativo o nullo. Se il determinante è diverso da zero la matrice si dice *non singolare*, mentre, se il determinante è nullo la matrice si dice *singolare*.

1.2.2 Complemento algebrico

In una matrice quadrata si definisce *complemento algebrico* dell'elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$, il determinante della matrice che si ottiene eliminando la *i-ma* riga e la *j-ma* colonna, avendo cura di cambiarne il segno se la somma degli indici $\boldsymbol{i+j}$ risulta dispari.

Data la matrice quadrata di Fig.6.1, calcolare il complemento algebrico $\boldsymbol{C_{23}}$ dell'elemento $\boldsymbol{a_{23}}$. Si elimina la 2^ riga e la 3^ colonna della matrice e si calcola il determinante della matrice 2x2 rimanente. Siccome, 2+3=5, è un numero dispari, il determinante ottenuto (43) si cambia di segno.

4	-5	6
-5	-1	7
3	7	-5

$\Rightarrow$

4	-5
3	7

$$C_{23} = -\{[(4)\times(7)]-[(3)\times(-5)]\} = -43$$

Fig. 6.1

1.3 Algebra delle matrici

Le matrici possono essere trattate come se fossero dei numeri *sui generis*, cioè per esse è possibile definire le quattro operazioni algebriche fondamentali: *somma*, *differenza*, *prodotto* e *divisione*. Così come nell'*Algebra ordinaria* i numeri vengono rappresentati con dei simboli (lettere minuscole dell'alfabeto latino), altrettanto occorre fare nell'*Algebra matriciale*. Per evitare di far confusione tra numeri e matrici, queste ultime vengono rappresentate simbolicamente con delle

$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ =

8	4	-5	2	1
11	0	7	3	4
15	4	-2	2	6

$\underline{\boldsymbol{B}}$ =

7
4
-2
6
15
14

Fig. 7.1